

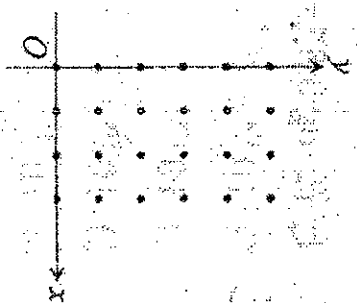
一、多重選擇題(5 分，全對才給分)

2. 4 1. 坐標平面上有一等腰梯形，已知其兩邊分別落在 x 軸與直線 $y = \sqrt{3}x$ 上，另兩邊落在直線 L_1 與 L_2 上且 L_1 與 L_2 的交點坐標為 $(3, \sqrt{3})$ ，下列敘述哪些正確？

- (1) L_1 與 L_2 必有其中一條直線方程式為 $y = \sqrt{3}$
- (2) L_1 與 L_2 必有其中一條直線方程式為 $y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$
- (3) L_1 與 L_2 必有其中一條直線方程式為 $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$
- (4) 此等腰梯形面積必為 $3\sqrt{3}$
- (5) 此等腰梯形的面積有兩個可能值

二、填充題(每格 6 分)

1. 坐標平面上，點 $P(x, y)$ 為格子點 (x, y 皆為整數)，若 $0 \leq x \leq 3$ ， $0 \leq y \leq 5$ ，如右圖所示，任意二個格子點可連成一直線，並可求其斜率，若不考慮斜率不存在的情形，可得 25 種不相等的斜率。



2. 由 5, 6, 7, 8, 9 排成一個可被 11 整除之最大五位數，此數為 97856

3. 假設 a, b, c 為相異正整數，則滿足 $a \cdot b \cdot c = 2310$ 之集合 $S = \{a, b, c\}$ 有 40 個

4. 已知拋物線 $y = x^2 + 3x - 1$ 上有相異兩點對直線 $x + y = 0$ 成對稱，則此兩相異點的座標為 $(1, 3)$ 或 $(-3, -1)$

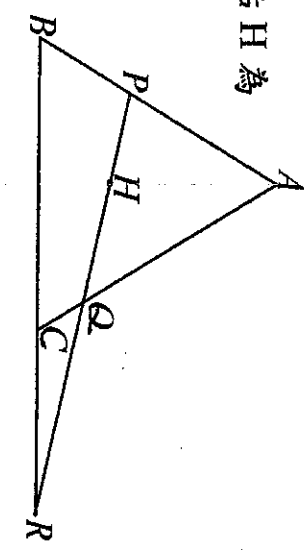
5. 已知一項過關遊戲規則為：在第 n 關要擲一顆骰子 n 次，所出現的點數和大於 2，才算過關。那某人連過前兩關的機率為 $\frac{5}{9}$

6. 設函數 $f(x)$ 對於任一實數 x 滿足 $f(3+2x) = f(4-2x)$ ，若方程式 $f(x) = 0$ 有六個相異實根，則此六個相異實根之和為 > 1

7. 袋中有 4 紅球，5 白球，今自袋中每次取出一球，取出不放回，取完為止。則取球過程中，紅球個數不多於白球個數之機率為 $\frac{1}{3}$

8. 設 $n \in \mathbb{N}$, $(2 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n \sqrt{3}$, 其中 $x_n, y_n \in \mathbb{N}$, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \underline{\sqrt{3}}$

9. 已知正三角形 ABC 之邊長為 $2\sqrt{3}$, 如圖所示, 若點 H 為正三角形 ABC 之垂心, 今在 \overline{BC} 邊之延長線上取一點 R, 則直線 \overline{HR} 分別與 \overline{AB} 、 \overline{AC} 邊相交於 P、Q 二點, 則 $\frac{1}{HP} \cdot \frac{1}{HQ} \cdot \frac{1}{HR} = \underline{8}$



10. 在以原點 $O(0, 0, 0)$ 為球心, 半徑為 1 的單位球上取一點 $A = (a_1, a_2, a_3)$. 點 A 所對的另一點 $B(a_3, a_1, a_2)$ 有在這個單位球上。則 $\angle AOB$ 的最大值為 $\underline{\frac{2\pi}{3}}$ 。

三、計算證明題 (詳列計算過程, 否則不予計分)

1. 設 $f: N \rightarrow R$, 且滿足

$$(1) f(1) = \frac{3}{2}$$

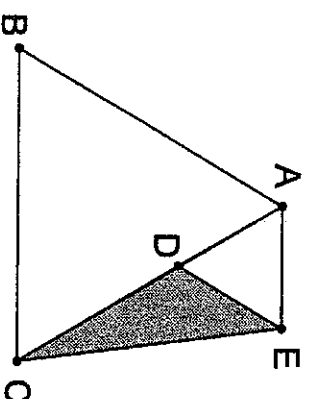
$$(2) \forall x \in N, f(x+1) = (1 + \frac{1}{x+1}) \cdot f(x) + (1 + \frac{x}{2}) \cdot f(1) + x^2 + 2x,$$

則 $f(100) = ?$ (8分)
507525

2. 設 a, b, c 為三角形的三個邊長, m 為一定數, 若 $a + \frac{m}{a} = b + \frac{m}{b} = c + \frac{m}{c}$, 求證此三角形為等腰三角形。 (8分)

3. 右圖中, $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 均為正三角形, 若此兩正三角形的面積之和為 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 則 $\triangle CDE$ 的面積之最大值為何? (8分)

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{8}$$



4. 設 $0 \leq \theta < 2\pi$, 且 $x = \cos 2\theta - 2\sin \theta$,

(1) 試證 $y = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x}{4})^n$ 為收斂級數。(4分)

(2) 若 y 為收斂級數, 試求 y 的最大值及最小值? (7分) $M = \frac{3}{5}, m = -\frac{3}{7}$