

國立臺中女子高級中學 97 學年度教師甄選 數學科 試題

壹、單一選擇題（每題 5 分，共 10 分）

1. 設 $f(x) = 6x^{100} - x^2 - 4$, $i = \sqrt{-1}$ ，下列何者為正確？

(A) $f(i) = 1$

(B) 以 $x^2 - x + 1$ 去除 $f(x)$ 所得餘式為 $5x - 3$

(C) $f(f(f(1))) = 1$

(D) $f\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) = \frac{13 - 7\sqrt{3}i}{2}$

2. 老師想從甲、乙、丙、丁四人中派一位出公差，為了公平起見，此四人協商要以猜拳的方法來決定這位公差，猜拳的方式如下：先以『黑白猜(即每人以手掌向上或向下兩種方式出拳)』篩選，直到恰有一人出的手掌方向與其他三人不同，則此人就不必出公差；接下來其餘三人再以『剪刀、石頭、布』的方式出拳比輸贏，直到三人中恰有一人輸為止，則此輸的人即為出公差者。依照上述的猜拳規則，則此四人為了決定出公差人選的猜拳次數期望值為

(A) 4 次

(B) 5 次

(C) 8 次

(D) 12 次

貳、填充題（每題 5 分，共 60 分）

1. 設 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ，若 $\sin(x + \frac{4\pi}{3}) + \cos(x - \frac{2\pi}{3})$ 之最小值為 m ，試求 m 之值：_____。

2. 設 x, y 均為實數，考慮方程式 $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$ 的圖形，若 A 為其短軸上的一個頂點， F_1, F_2 為其兩焦點，試求 $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2}$ 之值：_____。

3. 設有一等腰三角形的三邊長為有理數，且恰好是方程式 $x^3 - 16x^2 + px - 150 = 0$ 的三根，試求 p 之值：_____。

4. 已知 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 且 $16^{1+\sin^2 x} + 4^{1+\cos 2x} = 40$ ，則 $\tan x =$ _____。

5. 設 $\triangle ABC$ 中， D 在 \overline{BC} 邊上，且 \overline{AD} 為 $\angle A$ 之內角平分線，若 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AC} = 6$ ，將射線 \overline{AD} 延長至 P 點，使得

$\triangle ABP$ 面積 $= \frac{9}{2} \triangle ABC$ 面積，若 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。

6. 已知空間中一點 $P(9, 12, 5)$ 與一球面 $S: x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$ ，若球面 S 與 xy 平面之交圓為 C ，則點 P 與圓 C 上的點距離之最小值為：_____。

7. 設每一個自然數 N 中，數字 n 恰出現 n 次 ($n = 1, 2, \dots, 9$)，則稱此自然數 N 為「自我描述數」。例如 122 是一個三位自我描述數，32233 是一個五位自我描述數，則七位自我描述數共有_____個。

8. 為了驗證一枚古硬幣是否為勻稱的硬幣，某人做了多次的投擲試驗，並發表推論如下：「我們有 95% 的信心認為此硬幣出現正面的機率是 38% 到 42% 之間。」則在此實驗中此人總共投擲了_____次硬幣。

9. 已知 $\begin{bmatrix} \sin 28^\circ & \cos 28^\circ \\ \cos 28^\circ & -\sin 28^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ($ab \neq 0$)，若 $\tan \theta = \frac{b}{a}$ 且 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ，則 $\theta =$ _____。

10. 兩曲線 $\Gamma_1: y=x^3+x$ 、曲線 $\Gamma_2: y=x^3+x+k$ ，若直線 L 為兩曲線 Γ_1 、 Γ_2 之公切線且直線 L 之斜率大於 4，試求實數 k 之範圍：_____。
11. 直線 L 過點 $P(16, 1)$ 且與 x 軸正向、 y 軸正向分別交於 A 、 B 兩點， O 為原點，試求 $\overline{OA}^3 + \overline{OB}^3$ 的最小值_____。
12. 研究六位學生的性向測驗與成就測驗的關係，已知六位學生兩種測驗的得分如下：

學生代號		A	B	C	D	E	F	總計
得分	性向 x	5	6	8	9	9	11	48
	成就 y	5	8	8	12	13	14	60

試求滿足這些數據之最適合直線方程式：_____。