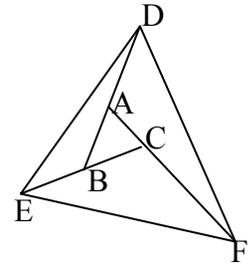


一、填充題:(每題 6 分)

1. 如右圖， $\overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\overline{BE} = \overline{BC}$ ， $\overline{CF} = 3\overline{AC}$ ，且 $\triangle ABC$ 面積 = 3cm^2 ，求 $\triangle DEF$ 面積 = ?



2. 已知 $\frac{9}{a^2} + \frac{3}{a} - 2 = 0$ ，及 $2b^2 + b - 1 = 0$ ，且 $2ab \neq 3$ ，求 $\frac{b}{a}$ 之值。

3. 設凸 n 邊形有 a_n 條對角線，求 $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} + \dots + \frac{1}{a_{20}} = ?$

4. 設 n 為自然數，若 $\sqrt{\frac{43}{2} + \sqrt{\frac{1849}{4} - n}} + \sqrt{\frac{43}{2} - \sqrt{\frac{1849}{4} - n}}$ 也為自然數， $n = ?$

5. 將編號 1 到 100 的球依下列規則排成 10 列 10 行正方形，則在第 6 列第 7 行的數是多少?

第一列	① ② ⑥ ⑦.....○
第二列	③ ⑤ ⑧.....○
第三列	④ ⑨.....
第四列	⑩.....
⋮	⋮
第十列	○.....○

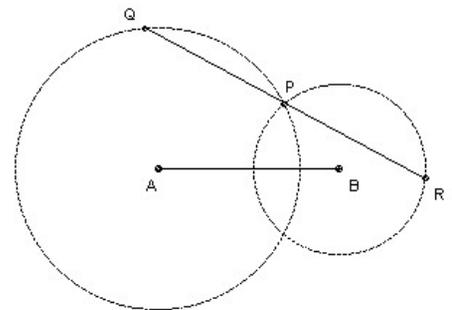
6. 若 α 是 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 的一根，則 $\frac{\alpha^5 - 5\alpha^4 + 2\alpha^3 + 8\alpha^2 - 12}{\alpha^2 + 2}$ 的值為何?

7. 已知 $\frac{1}{X} + \frac{2}{Y} = 3$ ，求 $\frac{(3X + 2)(3Y + 4) - 8}{1 - (2X - 1)(Y - 1)} = ?$

8. 若 $f(x) = \frac{183}{1+x^2}$ 則 $f(1) + f(4) + f(9) + f(16) + f(25) + f(36) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{9}) + f(\frac{1}{16}) + f(\frac{1}{25}) + f(\frac{1}{36}) = ?$

9. 求 $2^{7^{3^5}}$ 的個位數字為何?

10. 如右圖， $\overline{AB} = 6$ ，圓 A 半徑為 4，圓 B 半徑為 3，兩圓交於兩點，其中一點為 P，過 P 點的直線分別交兩圓於 Q，R，且 $\overline{QP} = \overline{PR}$ ，則 \overline{QP}^2 之值為何?



11. 有一函數 $f(x)$ ，滿足 $f(a+b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$ ， a, b 為任意實數，若 $f(1) = 2$ ， $f(2012) = \frac{n}{m}$ ， m, n 互質，則 $n - m = ?$

12. 設 $x > y > z > 0$ ，求滿足 $\sqrt{2736} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ 的整數解有幾組?

二、計算證明題: (共 28 分)

1.(1)平面上， $\triangle ABC$ 中 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 邊上的高分別為 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ ， P 為 $\triangle ABC$ 內部任意點，若 P 到三邊 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的距離分別為 d, e, f ，試證 $\frac{d}{AD} + \frac{e}{BE} + \frac{f}{CF} = 1$ 。(4 分)

(2)設 P 是邊長為 2 的正 $\triangle ABC$ 內部任意點，則 P 到三邊的距離和為何?(4 分)

2.(1)因式分解 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 。(4 分)

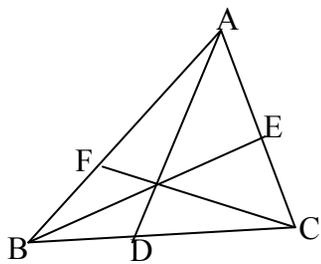
(2) 設 $x > y > z$ 求滿足 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3=-360 \end{cases}$ 的整數解。(4 分)

(3)求方程式 $(x^2-3x+2)^3+(x^2-5x-6)^3-(2x^2-8x-4)^3=0$ 的解。(4 分)

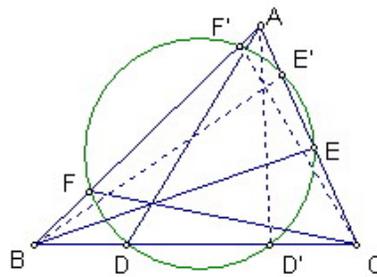
3. 平面上， D, E, F 為 $\triangle ABC$ 中 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 邊上的點(如圖一)

(1)證明： $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 三線共點，充要條件為 $\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$ 。(4 分)

(2)設 $\triangle DEF$ 的外接圓也和 $\triangle ABC$ 中 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 邊分別交於 D', E', F' ，如圖二，若 AD, BE, CF 三線共點，試證明 AD', BE', CF' 三線也共點。(4 分)



圖(一)



圖(二)