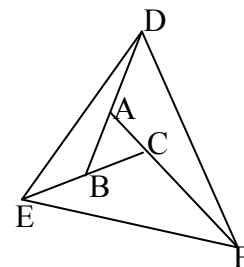


一、填充題:(每題 6 分)

1. 如右圖， $\overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\overline{BE} = \overline{BC}$ ， $\overline{CF} = 3\overline{AC}$ ，且  $\triangle ABC$  面積 =  $3\text{cm}^2$ ，求  $\triangle DEF$  面積 = ?



2. 已知  $\frac{9}{a^2} + \frac{3}{a} - 2 = 0$ ，及  $2b^2 + b - 1 = 0$ ，且  $2ab \neq 3$ ，求  $\frac{b}{a}$  之值。

3. 設凸  $n$  邊形有  $a_n$  條對角線，求  $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} + \dots + \frac{1}{a_{20}} = ?$

4. 設  $n$  為自然數，若  $\sqrt{\frac{43}{2} + \sqrt{\frac{1849}{4} - n}} + \sqrt{\frac{43}{2} - \sqrt{\frac{1849}{4} - n}}$  也為自然數， $n = ?$

5. 將編號 1 到 100 的球依下列規則排成 10 列 10 行正方形，則在第 6 列第 7 行的數是多少?

第一列	① ② ⑥ ⑦.....○
第二列	③ ⑤ ⑧.....○
第三列	④ ⑨.....
第四列	⑩.....
⋮	⋮
第十列	○.....○

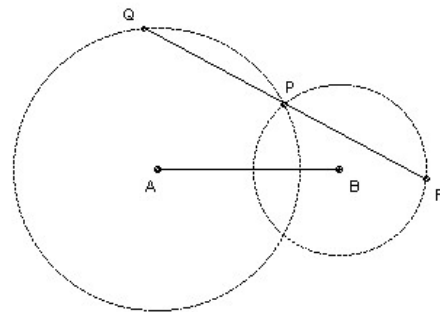
6. 若  $\alpha$  是  $x^2 - 4x + 2 = 0$  的一根，則  $\frac{\alpha^5 - 5\alpha^4 + 2\alpha^3 + 8\alpha^2 - 12}{\alpha^2 + 2}$  的值為何?

7. 已知  $\frac{1}{X} + \frac{2}{Y} = 3$ ，求  $\frac{(3X+2)(3Y+4)-8}{1-(2X-1)(Y-1)} = ?$

8. 若  $f(x) = \frac{183}{1+x^2}$  則  $f(1)+f(4)+f(9)+f(16)+f(25)+f(36)+f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{9})+f(\frac{1}{16})+f(\frac{1}{25})+f(\frac{1}{36}) = ?$

9. 求  $2^{7^{3^5}}$  的個位數字為何?

10. 如右圖， $\overline{AB} = 6$ ，圓 A 半徑為 4，圓 B 半徑為 3，兩圓交於兩點，其中一點為 P，過 P 點的直線分別交兩圓於 Q，R，且  $\overline{QP} = \overline{PR}$ ，則  $\overline{QP}^2$  之值為何?



11. 有一函數  $f(x)$ ，滿足  $f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ ， $a, b$  為任意實數，若  $f(1) = 2$ ， $f(2012) = \frac{n}{m}$ ， $m, n$  互質，則  $n - m = ?$

12. 設  $x > y > z > 0$ ，求滿足  $\sqrt{2736} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$  的整數解有幾組?

二、計算證明題: (共 28 分)

1.(1)平面上， $\triangle ABC$  中  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  邊上的高分別為  $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ ， $P$  為  $\triangle ABC$  內部任意點，若  $P$  到三邊  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  的距離分別為  $d, e, f$ ，試證  $\frac{d}{AD} + \frac{e}{BE} + \frac{f}{CF} = 1$ 。(4 分)

(2)設  $P$  是邊長為 2 的正  $\triangle ABC$  內部任意點，則  $P$  到三邊的距離和為何? (4 分)

2.(1)因式分解  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 。(4 分)

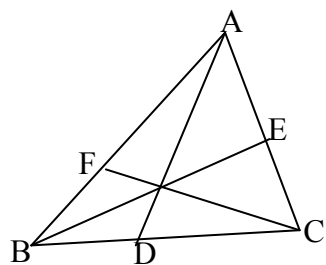
(2) 設  $x > y > z$  求滿足  $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -360 \end{cases}$  的整數解。(4 分)

(3)求方程式  $(x^2 - 3x + 2)^3 + (x^2 - 5x - 6)^3 - (2x^2 - 8x - 4)^3 = 0$  的解。(4 分)

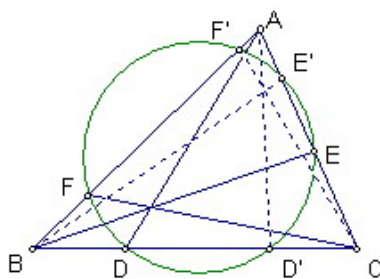
3. 平面上， $D, E, F$  為  $\triangle ABC$  中  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  邊上的點(如圖一)

(1)證明:  $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$  三線共點，充要條件為  $\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$ 。(4 分)

(2)設  $\triangle DEF$  的外接圓也和  $\triangle ABC$  中  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  邊分別交於  $D', E', F'$ ，如圖二，若  $AD, BE, CF$  三線共點，試證明  $AD', BE', CF'$  三線也共點。(4 分)



圖(一)



圖(二)