

教師甄試數學科 筆試試題

注意：請在答案卷上標示題號並依照題號順序作答。

本份試題共有 12 大題。

1. 今有一數列  $\{a_n\}$  的遞迴關係式為 
$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n - 1} \end{cases} \quad (n \geq 1)$$
，試回答以下問題：

- (1) 證明對於所有的正整數  $n$ ， $2 < a_{n+1} < a_n$  恆成立。(3 分)
- (2) 證明對於所有的正整數  $n$ ， $|a_{n+1} - 2| < \frac{1}{2}|a_n - 2|$  恆成立。(3 分)
- (3) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。(3 分)

2. 橢圓  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  上有兩動點  $P$ 、 $Q$  滿足  $\overline{OP} \perp \overline{OQ}$ ，其中  $O$  為原點。試回答以下問題：

- (1) 證明  $\frac{1}{\overline{OP}^2} + \frac{1}{\overline{OQ}^2}$  為定值。(4 分)
- (2) 求出  $\overline{OP} \times \overline{OQ}$  的最小值。(4 分)

3. 考慮複數集合  $T = \{z^2 + 2z \mid z \in \mathbb{C} \text{ 且 } |z| \leq \frac{5}{3}\}$ 。若今  $T$  的元素  $\omega$  的絕對值大於等於  $T$  所有元素的絕對值，請求出複數  $\omega$ 。(8 分)

數學

4.  $\triangle ABC$  中， $\angle A = \frac{\pi}{2}$ ， $\overline{BC} = 4$ ，點  $M$  為  $\overline{AB}$  的中點，令  $\angle B = \theta$ 。今將  $\triangle AMC$  沿著  $\overline{CM}$  摺起後，使  $A$  點至  $A'$  點且  $\overline{A'B} = 2\sqrt{2}$ ，當四面體  $A'-MBC$  的體積有最大值，此時  $\sin \theta = ?$  (9 分)

5. 已知平面向量  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$  滿足  $|\vec{a} - \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b} + 1$ ， $|\vec{a}| = |\vec{c}| = 1$ ，則  $|3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}|$  的最小值為何？(8 分)

6.  $A$  是不為零矩陣的二階方陣， $M$  是矩陣的集合，滿足  $M = \{X \mid AX = 2XA\}$ 。若  $X$ ， $X^2$  都是  $M$  的元素，試證： $X$  沒有反方陣。(8 分)

7. 將數字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 排成一列，記第  $i$  個數字為  $a_i$ ， $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ，須滿足下列兩個條件，  
條件一： $a_1 \neq 1$ ， $a_3 \neq 3$ ， $a_5 \neq 5$ ， $a_7 \neq 7$ ；  
條件二： $a_1 < a_3 < a_5 < a_7$ ，則共有幾種不同的排列方法？(8 分)

8. 若  $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$  是  $xy$  平面上的兩點，定義兩點的「曼哈頓距離」為  $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ ，假設兩點之間只能沿著水平線及鉛直線移動，一開始某人在原點，每一分鐘隨機選擇「東、西、南、北」其中一個方向前進一個單位，每個方向的機率均為  $\frac{1}{4}$ ；若四分鐘後此人停留在原點，則可獲得獎金 1600 元；若四分鐘後此人與原點的「曼哈頓距離」為 2 單位，則可獲得獎金 300 元；若四分鐘後此人與原點的「曼哈頓距離」為 4 單位，則可獲得獎金 800 元，試問：  
(1) 『四分鐘後此人與原點的「曼哈頓距離」為 4 單位』事件的機率為何？(2 分)  
又『四分鐘後此人與原點的「曼哈頓距離」為 2 單位』事件的機率為何？(2 分)  
(2) 參與這個遊戲可得獎金的期望值為多少元？(5 分)

9. 有三實數其平均值為 5，標準差為  $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ 。已知此三數加入另一實數  $x$  後，平均值仍為 5，標準差為  $\sigma$ ；若再加入另一實數  $y$ ，這五個數的標準差仍為  $\sigma$ ，則  $(x-y)^2 = ?$  (8 分)

10. 設多項式函數  $f(x)$  的圖形與  $x$  軸恰交於一點  $(2,0)$ ，若  $(x-5) \cdot f(x)$  除以  $x^3$  的商為  $(x+k)^2$ ，餘式為  $-5x^2 + ax + b$ ，試求  $ka + b$  的值。(8 分)

11. 在  $\triangle ABC$  中，已知  $\cos C = \frac{\sin A + \cos A}{3} = \frac{\sin B + \cos B}{3}$ ，試求  $\sin C$  的值。(8 分)

12. 在坐標平面上，已知圓  $C_1: x^2 + y^2 = 1$ ，圓  $C_2: (x+4)^2 + y^2 = 4$ ，動點  $P$  在直線  $L: x - 2\sqrt{2}y + b = 0$  ( $b < 0$ ) 上，過  $P$  分別作圓  $C_1$ 、 $C_2$  的切線，切點分別為  $A, B$ ，若滿足  $\overline{PB} = 2\overline{PA}$  的點  $P$  恰有一個，試求實數  $b$  的值。(9 分)