

臺北市立松山高級中學 114 學年度第 1 次正式教師甄選數學科初試試題

請使用黑色或藍色原子筆書寫，滿分 100 分。

一、填充題（答案請寫在答案欄，每題 4 分，共 20 分）

1. 試求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{1+4^{2^n}} =$ _____。

2. 已知拋物線 $y^2 = x$ 與圓 $(x-4)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 交於相異四點，試求 r 的取值範圍為_____。

3. 設 a, b 為實數，試求 $\sqrt{2a^2 - 6a + 5} + \sqrt{b^2 - 4b + 5} + \sqrt{2a^2 - 2ab + b^2}$ 的最小值為_____。

4. 從正四面體的頂點及各稜邊的中點共 10 個點中，隨機選取四個相異點，則四點不共平面的機率為_____。

5. 在空間坐標中，將以三點 $(1,0,0)$ ， $(0,1,1)$ ， $(0,0,1)$ 為頂點的三角形繞 z 軸旋轉，則所得旋轉體體積為_____。

答案欄

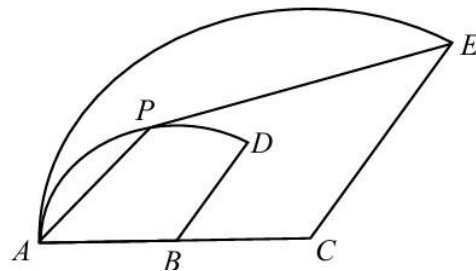
1	2	3	4	5
$\frac{1}{15}$	$\frac{\sqrt{15}}{2} < r < 4$	$\sqrt{10}$	$\frac{47}{70}$	$\frac{\pi}{3}$

二、計算題（需詳列計算過程，每題 8 分，共 80 分）

1. 如圖，兩扇形 ABD 與扇形 ACE ，其中 B 為 \overline{AC} 的中點，

$$\angle ABD = \angle ACE = \frac{2\pi}{3}。若點 P 為 AD 上一點且滿足 $\overline{PA} = 3$ ，$$

$\overline{PE} = 7$ ，試求扇形 ABD 的面積為_____。



答案： $\frac{91}{36}\pi$

2. 試求滿足方程組
$$\begin{cases} xy = z - x - y \\ xz = y - x - z \\ yz = x - y - z \end{cases}$$
 的有序實數組 (x, y, z) 。

答案： $(-1, -1, -1)$ ， $(0, 0, 0)$ ， $(0, -2, -2)$ ， $(-2, 0, -2)$ ， $(-2, -2, 0)$

3. 若函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 滿足「對任意實數 x, y 均有 $f(x)f(y) = f(x+y) + xy$ 」，回答下列問題。

(1) 試求 $f(0)$ 的值。

(2) 試求滿足題意條件的所有函數 $f(x)$ 。

答案：(1) 1 (2) $f(x) = 1+x$ 或 $1-x$

4. 假設兩數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，對所有正整數 n 都滿足 $2b_n + \frac{6n-30}{n} < a_n < 4b_n$ 。已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 12$ ，試說明

數列 $\langle b_n \rangle$ 發散或收斂？若收斂，求其極限值。

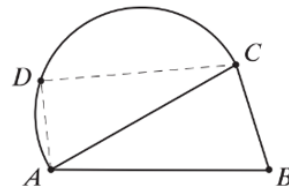
答案：由夾擠定理得數列 $\langle b_n \rangle$ 收斂，其極限值為 3

5. 在坐標平面上有一個三角形 ABC ，已知 $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AC} = 3$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ，若平面上有一動點 D 滿

足 $|\overrightarrow{CD}| = 1$ ，試求 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}|$ 的最小值。

答案： $\sqrt{19} - 1$

6. 如圖， $\triangle ABC$ 三邊長分別為 $\overline{AB}=6$ 、 $\overline{BC}=3$ 、 $\overline{AC}=3\sqrt{3}$ ，以 \overline{AC} 為直徑作一半圓，在半圓上取一點 D ，求四邊形 $ABCD$ 周長的最大值。



答案： $9+3\sqrt{6}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=5$ 、 $\overline{BC}=7$ 、 $\overline{AC}=6$ ， $\triangle ABC$ 的內切圓 Γ 切 \overline{BC} 於 D ， P 是 \overline{AD} 與 Γ 的另一個交點。

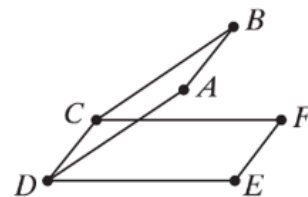
(1) 若 $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ ，求數對 (s, t) 。

(2) 若 $\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$ ，求數對 (p, q) 。

答案：(1) $(\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$ (2) $(\frac{4}{31}, \frac{3}{31})$

8. 空間中，矩形 $ABCD$ 與矩形 $CDEF$ 的兩面角為 30° ， $\overline{AD}=20$ ， $\overline{AF}=26$ ，且 A 點在平面 $CDEF$ 的投影點為 H 。已知 G 點在矩形 $CDEF$ 所在平面上，

且 $\overline{FG} \perp \overline{FA}$ ， $\overline{FG}=32$ ，求 $|\overrightarrow{GH}|$ 。



答案：40

9. 已知 $L_1: \begin{cases} x=7+4t \\ y=2-t \\ z=4+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ 與 $L_2: \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 3y-2z+11=0 \end{cases}$ 為正四面體 Γ 某兩個稜所在的直線。說明 L_1 與 L_2

的位置關係，並求正四面體 Γ 的體積。

答案： L_1 與 L_2 歪斜；正四面體 Γ 的體積為 $16\sqrt{6}$

10. (1) 請詳述微積分基本定理。

(2) 在課堂上教微積分基本定理的時候你會如何證明或說明？

答案：(1) 設 $f(x)$ 為 $[a, b]$ 上的連續函數，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個反導函數，

$$\text{則 } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (\text{龍騰課本})$$

(2) 略