

國立鳳新高級中學 114 學年度第 1 次教師甄選
【數學科】試題

請於考試鈴聲響起後再翻頁作答

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

作答方式：

- 一、作答時須詳述演算過程與清楚標明答案。
- 二、請於答案卷上註明題號、答案。
- 三、應試限用藍色或黑色原子筆作答。
- 四、考試結束，試題卷及答案卷皆須繳回。

國立鳳新高級中學 114 學年度第 1 次教師甄選

【數學科】試題

【計算證明題】

(每題 10 分，共 100 分，需寫出計算過程或證明理由，否則將酌以扣分)

1. 設直線 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ ，直線 $L_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$ 為兩歪斜直線，

平面 $E: x - y + 2z - 1 = 0$ ，試求直線 L_1 與直線 L_2 在平面 E 的投影直線 M_1 與 M_2 的交點坐標。

2. 將 1,2,3,4,5,6,7 排成一行，若規定排列後不得出現 12,23,34,45,56,67 (如：1273546 不合題意，7362154 符合題意)，則有多少種排法？

3. 已知複數 z 滿足 $\frac{z}{2}$ 與 $\frac{2}{z}$ 的實部與虛部都在閉區間 $[-1,1]$ 上，試求 z 在複數平面上所成的軌跡的面積。

4. 設 $a \in \mathbb{R}$ ，若 $y = x^3 - x$ 與 $y = x^2 - a^2 + a$ 有公切線，試求 a 的範圍。

5. 設 P 為正三角形 ABC 的內部一點，三角形邊長為 1，若 P 依序到三邊 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{AB} 的距離分別為 1:3:2，試判斷 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 是否會大於 2？

6. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{AC} = 4$ ， P 點為斜邊 \overline{AB} 上的動點，現在沿著 \overline{CP} 將 $\triangle BCP$ 折起來，使折起來後的平面 BCP 垂直平面 ACP ，則折起來後的 \overline{AB} 最小值為何？

國立鳳新高級中學 114 學年度第 1 次教師甄選

【數學科】試題

7. 設 P 為平面上任意一點， O 為原點，若二階方陣 A 將 P 對應到 Q 且 $\overline{PO} = \overline{QO}$ ，以高中數學內容證明： A 必為平面變換中的旋轉矩陣或鏡射矩陣。

8. 若 x, y 為正數，且 $x^2 + \frac{y^2}{45} = 1$ ，則試求 $\frac{2}{1-x} + \frac{75}{10-y}$ 之最小值。

9. 令 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ ，其中 n 為正整數，試回答下列各問題：

(1) 試證明：當 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 時， $\tan x \leq x + 1 - \frac{\pi}{4}$ 。(2 分)

(2) 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ 之值。(2 分)

(3) 請用 n 表示 $I_n + I_{n+2}$ 之值。(1 分)

(4) 利用 (3) 的結果計算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ 。(5 分)

10. (1) 試證明 已知 α, β, γ 為三實數，假設 $t = -(\alpha + \beta + \gamma)$ ， $v = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ ，且滿足 $\alpha\beta\gamma = -1$ 、 $t + v = -3$ ，則

$$\alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}} + \gamma^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-t-6) + 3\sqrt{t^2 + 3t + 9}}。$$

(5 分)

(2) 利用 (1) 的結果，試證明

$$\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - 2)}。$$

(5 分)

國立鳳新高級中學 114 學年度第 1 次教師甄選
【數學科】試題答案

1. $(6, 3, -1)$

2. 2119

3. $12 - 2\pi$

4. $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

5. 否

6. $\sqrt{13}$

7. 略

8. 21

9. (1) 略

(2) 0

(3) $\frac{1}{n+1}$

(4) $\ln(\sqrt{2})$

10. (1) 略

(2) 略