國立彰化女子高級中學 114 學年度第一次教師甄試【數學科】題目卷

一、填充題(每題 5 分，答案都須化為最簡分數或有理化，且完全正確才給分，共 75 分)

1、已知 x, y 為自然數，若 $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{3}{7}$，試求出所有的數對 (x,y)。

2、已知過點 $(3,0)$ 且斜率為 m 之直線 L，和雙曲線 $\Gamma: x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右半邊圖形交於 A, B 兩點。設 $F(2,0)$ 為雙曲線 Γ 的右焦點，若 $\overline{AF}+\overline{BF}=16$，則 m 值為________。

3、已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1=0$，$a_2=1$ 且當 $n \geq 3$ 時，$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n!}$ 之值________。

4、三角錐 $O-ABC$ 中，三稜邊 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 兩兩相互垂直，若 ΔABC 面積為 1，則三角錐 $O-ABC$ 的體積最大值為________。

5、已知 $f(x)=x^4-2x^3-9x^2+7$ 與 $g(x)=x^3-4x^2-x+3$ 為兩個整數係數多項式，假設 $g(x)=0$ 的三個相異根分別為 α,β,γ，求 $\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)f(\gamma)}+\dfrac{f(\beta)}{f(\gamma)f(\alpha)}+\dfrac{f(\gamma)}{f(\alpha)f(\beta)}$ 之值________。

6、一橢圓的焦點為 $(2,4)$ 及 $(7,11)$，橢圓上一點 $P(5,5)$，試找出過 P 與橢圓相切的切線方程式為________。

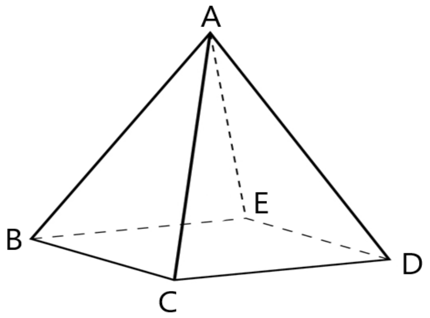
7、xy 平面上，兩圓 $C_1: x^2+y^2=1$ 及 $C_2:(x-4)^2+y^2=4$，動點 P 從 $(1,0)$ 出發沿 C_1 依逆時針方向運動，同時動點 Q 從 $(6,0)$ 出發沿 C_2 依逆時針方向運動，若 P 點的角速度為 Q 點的兩倍，則 $\overline{PQ}$ 的最大值為________。

8、A有2枚公正的硬幣，B有1枚公正的硬幣，兩人進行遊戲，規則如下：
(1)將自己的所有硬幣拋出，正面多的一方取走對方的一枚硬幣。
(2)若雙方的正面數相同，則雙方都不取走對方的硬幣。
上述的動作為一局，當有一方擁有3枚硬幣便贏得遊戲(即遊戲結束)，否則就繼續進行下一局。求A在前3局贏得遊戲的機率為________。

9、P點位於第三或第四象限，現向$y=x^2$做兩切線，若兩切點的距離為$\sqrt{12}$，則P點的橫坐標限制為________。

10、有一個足夠大的水桶，在t秒$(t\geq 0)$時向水桶內注水，注水速度為$(\frac{1}{2}t+4)\text{cm}^3/$秒，此時水桶內的水量為$V(t)\text{cm}^3$，已知$V(0)=100\text{cm}^3$。但每當水桶中的水量達$120\text{cm}^3$時，在注水的同時也以$13\text{cm}^3/$秒的速度讓水流出，且當水桶內的水量降至$80\text{cm}^3$時停止讓水流出(但依舊持續注水)。試問第________秒時水量會第二次達到120cm^3。

11、空間中有一個直四角錐（如下圖），其中底面$BCDE$為邊長6的正方形，且$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{AE}=5$，若平面$F$滿足到$A$、$B$、$C$、$D$、$E$五點距離皆相同，這樣的$F$共有$n$個，且滿足此條件的所有平面$F$可圍成另一個多面體，此多面體的體積為$V$，求數對$(n,V)$=__________。

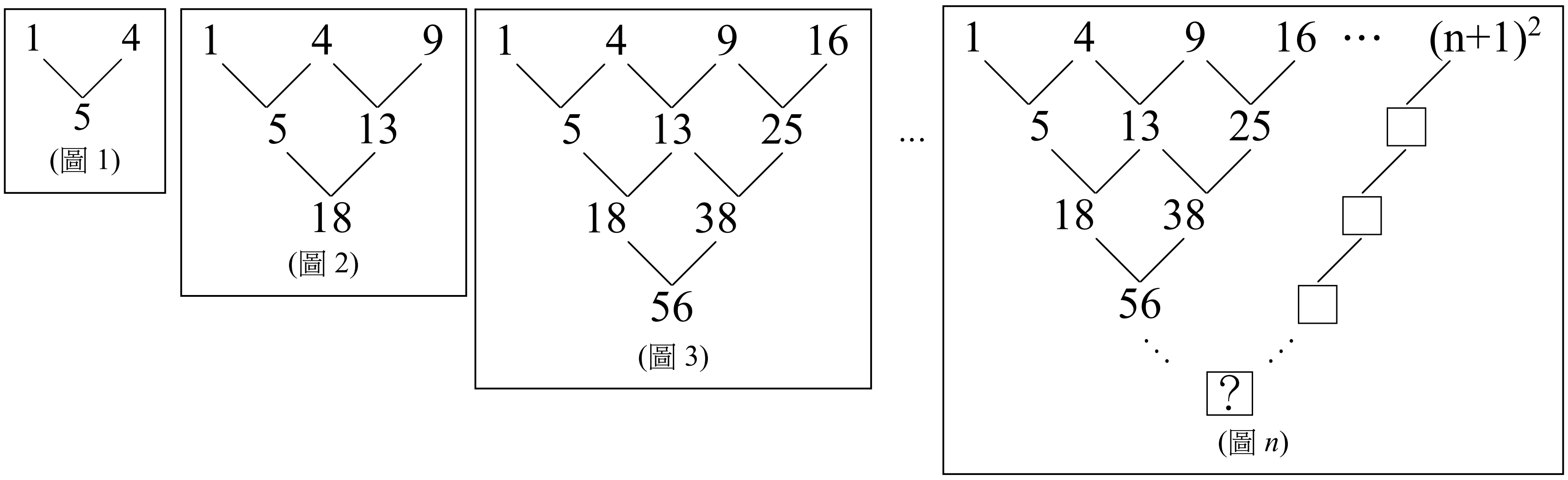


12、將彰化女中校歌前兩句「巍巍八卦山峨峨彰女中」共有10字重新排列，若希望同時滿足以下三條件：
(1)同字不相鄰　(2)「八」、「卦」、「山」三字順序維持　(3)「彰」、「女」、「中」三字順序維持且皆不相鄰，
那麼排列的方法共有________種。

13、設ΔABC的外心為O，滿足$2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，則$\cos B$的最小值為______。

14、重覆擲一個公正骰子，直到出現第二個 1 點就停止，若 X 表示投擲的總次數，則當機率 $P(X=k)$ 有最大值時，$k=$_______。

15、(圖 1)中，1+4=5；(圖 2)中，1+4=5、4+9=13、5+13=18；依此類推，每個圖的第 k 列數列為第 k-1 列相鄰兩數之和所形成的數列，每列比前一列少 1 項，並依此於最後一列得到一個整數。已知(圖 n)中，第一列數列為 1、4、9、16、⋯、$(n+1)^2$，並依上述規則得到最後一列的整數，則此整數為______________。(以 n 表示)



二、計算證明題(共 25 分)

1、想要求兩個歪斜線 $L_1: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-1}$ 與 $L_2: \frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-1}{1}$ 的距離，在現有各版本教材中，通常 採用以下兩種方法：

(法 1)設 $P(-1+2t, 2-2t, -t)$，$Q(3+s, 1-4s, 1+s)$，$\overrightarrow{PQ}$ 分別與兩直線方向向量內積值為 0，聯立解出 s,t 後，$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ 即為兩歪斜線距離。

(法 2)求出包含 L_2 且平行 L_1 之平面方程式 E，則 L_1 上任一點到平面 E 的距離即為兩歪斜線距離。

現有學生張彰，跟你請教是否有其他可以求出兩歪斜線距離的方法？請向張彰說出$\boxed{\text{兩個}}$異於(法 1)與(法 2)且限於 108 課綱內容的方法，來求出兩個歪斜線 L_1 與 L_2 的距離。(1 個方法 4 分，請先簡述想法，再寫出計算過程及解答)

2、$z\in\mathbb{C}$ 為 $x^9+\frac{2}{3}x^7+x^6+7=0$ 的解，試證明：$|z|<\frac{3}{2}$。(8 分)

3、(1) (單選題，2 分)

試問極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\left(\sqrt{4n^2+9\times1^2}+\sqrt{4n^2+9\times2^2}+\cdots+\sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2}\right)$ 的值可用下列哪一個定積分表示？

(A) $\int_0^3\sqrt{1+x^2}\,dx$ (B) $\int_0^3\sqrt{1+9x^2}\,dx$ (C) $\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$ (D) $\int_0^3\sqrt{4+9x^2}\,dx$ (E) $\int_0^3\sqrt{4x^2+9}\,dx$ 。

(2)承(1)，請求出此極限值。(計算題，需列計算過程，7 分)