

## 臺南市立沙崙國際高級中學高中部 114 學年度第 1 次教師甄選數學科試題卷

### 一、選擇題：5 題(10%)

1.  $a \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ ，已知  $a$  為實係數三次多項式  $f(x)$  的領導係數，若函數  $y = f(x)$  的圖形與  $x$  軸交於三點，且其  $x$  坐標成首項為 3、公差為  $a$  的等差數列。試問共有幾個  $a$  使得  $f(0) < 0$ ？  
(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 (E)4
2. 試求滿足  $\sin 18^\circ + \sin x^\circ = \cos 12^\circ$  的最小正數  $x$  之值為？  
(A)12 (B)22 (C)32 (D)42 (E)52
3. 已知  $f(x)$  為三次函數，下列何者正確  
(A) 若  $f''(3) = 0$ ，則  $x = 3$  處為反曲點。  
(B) 若  $f(x)$  在  $x = 3$  處為反曲點，則二次函數  $f'(x)$  在  $x = 3$  處有最大值。  
(C) 若  $f'(1) = f'(5)$ ，則  $x = 3$  處為反曲點。  
(D) 若方程式  $f'(x) = 0$  有兩相異實根，則方程式  $f(x) = 0$  有三相異實根。  
(E) 若方程式  $f'(x) = 0$  有兩相等實根，則方程式  $f(x) = 0$  有重根。
4. 空間坐標中，有一直線  $L: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3}$ ，與一平面  $E: x - y - z = 12$ ，已知平面  $E$  上有一點  $P$  滿足  $d(P, L) = 3\sqrt{10}$ ，下列哪些選項可能是  $P$  坐標？  
(A) (12, 0, 0) (B) (4, -4, -4) (C) (0, -9, -3) (D) (0, -3, -9) (E) (8, 1, -5)
5. 方陣  $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，若數列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  滿足  $A^n = a_n A + b_n I$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，下列何者正確？  
(A)  $(A^2 + A)$  有反方陣  
(B)  $\{a_{2n}\}$  是等比數列  
(C)  $\{b_n\}$  是等差數列  
(D)  $\{a_n - b_n\}$  是等比數列  
(E)  $\{a_n^2 - b_n^2\}$  是等差數列

### 二、非選題：10 題(40%)

1. 我們定義「費氏數」：利用費氏數列的原理，先寫出兩個正二位數，然後從第三個數字開始，每位數都是前兩個數相加，直到不能寫為止。比如：12 → 123 → 1235 → 12358，5 + 8 = 13 無法寫在一個位數了，所以 12358 就是一個費氏數。而 58, 19 就不是費氏數。請位總共有\_\_\_\_\_個「費氏數」。
2. 正六邊形  $ABCDEF$  被圍在以平行  $x$  軸與  $y$  軸為邊的矩形  $PQRS$  內，其中  $A(0, 0), B(4, 2)$  且矩形  $PQRS$  四邊各交此正六邊形於一點，求此矩形  $PQRS$  的面積為\_\_\_\_\_。
3.  $\triangle ABC$  中，已知  $\angle A = 60^\circ$ ， $D$  在  $\overline{AC}$  上且滿足  $\overline{AD} : \overline{CD} = 1 : 3$ 。若  $\triangle ABD$  的外接圓直徑 2，則  $\overline{AB} + \overline{AC}$  的最大值為\_\_\_\_\_。

\_\_\_\_\_。

4. 已知多項式  $f(x)$  滿足  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x[\int_1^2 f(x)dx] + 3$ ，試求  $\int_1^2 f(x)dx$  的值為\_\_\_\_\_。
5. 數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_1 = \frac{1}{3}, \sum_{k=1}^n a_k a_{n-k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1}, n = 1, 2, \dots, n$ ，則  $a_{2025} =$ \_\_\_\_\_。
6.  $a \in \mathbb{R}$ ，當  $a \leq x \leq a+1$  時，函數  $f(x) = |x^2 - 3x - 4| + x + 1$  的最大值為  $M(a)$ ，則  $M(a)$  的最小值為\_\_\_\_\_。
7.  $x, y$  為實數，則  $\sqrt{(x-6)^2 + (y-5)^2 + (x+y-2)^2} + \sqrt{(x-8)^2 + (y-2)^2 + (x+y-1)^2}$  最小值為\_\_\_\_\_。
8.  $a, b \in \mathbb{Z}$ ，已知整係數多項函數  $f(x)$  滿足  $f(2 + \sqrt{3}) = a - 2\sqrt{3}$ ，且  $f(x+2)$  除以  $(x^2 - 3)$  的餘式為  $(bx + 5)$ ，則數對  $(a, b) =$ \_\_\_\_\_。
9. 某店家辦理摸獎活動共有 100、200、300、400、500 元等五個獎項，花 100 元就可以摸獎一次。摸彩箱裡頭有 5 個紅球並分別標示獎項的金額、以及 15 個白球，一次取一球取後不放回，每一個球被取到的機會均等。小南 想要一直玩到抽中所有獎項為止，則獲利的期望值為\_\_\_\_\_。
10. 設  $x \in \mathbb{R}$ ， $f(x) = 1024^{\sin x} + 1024^{\cos x}$ ，將函數的最小值用科學記號表示為  $a \times 10^n$ ，其中  $1 \leq a < 10$  且  $n$  為整數。若  $a$  的整數部分為  $m$ ，則數對  $(m, n) =$ \_\_\_\_\_。