

臺北市立華江高級中學 114 學年度正式教師甄選數學科初試筆試題目卷

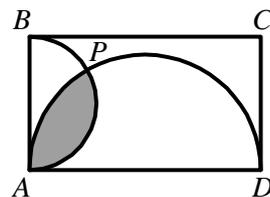
＊請依序將答案寫在答案卷上，並將題號標示清楚！

一、 填充題：（每題 5 分，該題全對才給分，共 60 分）

1. 若 $\triangle ABC$ 中， $\tan B = \frac{3}{4}$ ， $\tan C = \frac{3}{2}$ ， \overline{BC} 之中點為 M ， $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ 於 H ，若 $\overline{MH} = 5$ ，則 $\overline{AM} = 5\sqrt{10}$ 。

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt{\frac{n-3}{n+3}} - n) = -3$ 。

3. 如右圖，矩形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 2\sqrt{6}$ ， $\overline{BC} = 6\sqrt{2}$ ，以 \overline{AB} 、 \overline{AD} 為直徑作半圓交於 P ，則鋪色區域面積為 $5\pi - 6\sqrt{3}$ 。

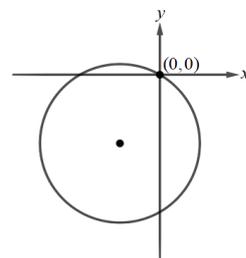


4. 設 θ 為銳角且滿足以下方程式：

$$C_0^3 + C_1^3 \times 2\cos\theta + C_2^3 \times 4\cos^2\theta + C_3^3 \times 8\cos^3\theta = C_0^3 \times 8 + C_1^3 \times 4\sin\theta + C_2^3 \times 2\sin^2\theta + C_3^3 \times \sin^3\theta$$

則 $\tan^2\theta = \frac{9}{16}$ 。

5. 如右圖，圓 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 通過 $(0,0)$ ，圓心在第三象限，此圓在第二象限內的弧長為 π ，在第四象限內的弧長為 2π ，圓半徑長為 3。



6. 設 a 、 b 均為實數，對任意實數 x ，若 $\frac{ax^2 + 2x + b}{x^2 + 1}$ 的最大值是 5，最小值是 3，則數對 $(a, b) = (4, 4)$ 。

7. 設集合 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，選擇 I 的兩個非空子集合 A 、 B ，使得 B 集合中的最小的數字大於 A 集合中最大的數字，則集合 A 、 B 有 49 種不同的取法。

8. 已知實數 $a > 1$ ，正方形 $ABCD$ 的面積為 36，其中 \overline{AB} 與 x 軸平行，且 A 、 B 、 C 分別為函數 $y = \log_a x$ ， $y = 2\log_a x$ ， $y = 3\log_a x$ 圖形上的點，試求 $a = \sqrt[3]{3}$ 。

9. 設函數 $f(x) = \begin{cases} ax + b[x], & x \geq 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases}$ ，其中 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，若 $f(x)$ 在 $x = 2$ 可微分，則數對 (a, b) 為 $(4, -2)$ 。

10. $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$ 展開後，同類項合併後的結果有 4 項。

11. 設兩數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 及 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{10}$ 滿足 $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2b_{n+1} \\ b_{n+1} = a_{n+1} - 3b_n \end{cases}$ ，

$n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 。已知 $a_9 = 243, b_{10} = 324$ ，試求數對 $(a_1, b_1) = (3, -1)$ 。

12. 已知 z 為複數且 $|z| = \sqrt{3}$ ， i 是虛數單位，則 $|\frac{1+2iz}{z-2i} + 4i| = 3\sqrt{3}$ 。

二、計算題：(共 40 分，請寫出詳細的計算過程，否則不予計分)

13. 設三次函數 $y = f(x) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 。已知廣域看 $y = f(x)$ 的圖形會很接近 $y = 4x^3$ 的圖形，而局部看 $y = f(x)$ 在 $x = -1$ 附近的圖形近似於 $y = -2x - 3$ ，又函數圖形的對稱中心在 $x = 1$ 處，求序組 (a, b, c, d) 。(8 分) 略

14. 一球上有五點 A, B, C, D, E ，圍成一四角錐，底面為四邊形 $ABCD$ ，已知 $\overline{AB} = \overline{AD} = 8, \overline{CB} = \overline{CD} = 10, \overline{EA} = \overline{EB} = \overline{EC} = \overline{ED} = 3\sqrt{10}$ ，試求下列各小題。略

- (1) 四邊形 $ABCD$ 的面積。(4 分)
 (2) 此球半徑。(4 分)
 (3) 此四角錐的體積。(4 分)

15. 已知圓 $x^2 + y^2 = 37$ 內部一點 $P(1, 2)$ ，若 P 點為某弦的一個三等分點，求此弦所在的直線方程式。(10 分) 略

16. 平面上，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 2, \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 1$ ， $\triangle ABC$ 的面積為 $S, \triangle ACD$ 的面積為 T ，則 $\overline{AC} =$ _____ 時，可得 $S^2 + T^2$ 的最大值為 _____。(10 分) 略

