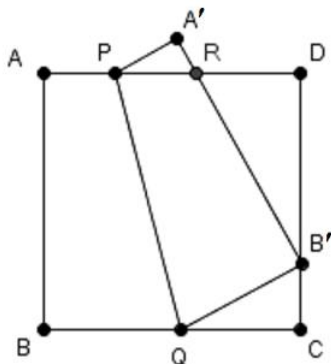


填充題(每題 6 分, 共 36 分)

1. 解 $x^4 - 22x^2 - 48x - 23 = 0$.
2. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 且 $\begin{cases} a+b+c+d = 4 \\ a^2+2b^2+3c^2+6d^2 = 10 \end{cases}$, 若 a 的最大值為 M , 最小值為 m , 求數對 (M, m) .
3. 球面上有四點 P, A, B, C , 且 $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ 兩兩垂直, $\overline{PA} = 2, \overline{PB} = 3, \overline{PC} = 6$, 求此球體的體積.
4. $a \in \mathbb{R}$, 過 $P(a, 2)$ 作 $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 的切線, 若所作的切線恰有一條, 求 a 的範圍.
5. 數列: $1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 26, \dots$, 依此規則, 若第 n 項為 a_n , 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$.
6. 設點 A, B 為 $\Gamma: y^2 = 4x$ 上除頂點 O 外的兩相異動點, 已知 $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, 且 M 為 \overline{AB} 上的點, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, 求 M 的軌跡方程式.

計算題(共 64 分)

1. 數列 $\langle a_n \rangle$, 已知 $a_1 = 2$, 設此數列前 n 項的和為 S_n , $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ 時, a_n 為 $3S_n - 4$ 與 $2 - \frac{5}{2}S_{n-1}$ 的等差中項,
 - (a) 求 a_n . (6 分)
 - (b) 證明: $\frac{1}{2}(\log_2 S_n + \log_2 S_{n+2}) < \log_2 S_{n+1}$. (6 分)
2. 證明 1023 可以整除 $2^{999} + 2^{888} + 2^{777} + \dots + 2^{222} + 2^{111} + 1$. (10 分)
3. 一袋中有 m 個白球與 n 個黑球, 自袋中一次取一球, 取後不放回, 直到取完所有白球才停止, 求所取球數的期望值. (10 分)
4. 如圖, $ABCD$ 是邊長為 1 的正方形, 沿 \overline{PQ} 對折, 使得 A, B 對折之後分別重合於 A', B' 兩點, 且 B' 在 \overline{CD} 上,



- (a) 證明 $\triangle RB'D$ 的周長為 2. (6 分)
 - (b) 求 $\triangle QB'C$ 的最大面積. (6 分)
5. 四面體 $ABCD$ 中, M, N 分別為 $\overline{AD}, \overline{BC}$ 的中點, $\overline{MN} \perp \overline{AD}$ 且 $\overline{MN} \perp \overline{BC}$, 證明
 - (a) $\overline{AB} = \overline{CD}$. (5 分)
 - (b) $\overline{AC} = \overline{BD}$. (5 分)
 6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 求兩焦點座標. (10 分)