准考證號碼：
姓名：

臺北市立南港高級中學 115 學年度正式教師甄試-高中數學科筆試

請於答案卷上作答，標示題號並詳細呈現解題過程

1~13 題每題 7 分，第 14 題每小題 3 分，滿分 100 分

1. 已知曲線$\Gamma: y=\dfrac{x^3}{3}-ax$，其中$a>0$，過原點作曲線$\Gamma$的切線$L$，過原點與切線$L$垂直的直線為$M$。求直線$M$與曲線$\Gamma$所圍的區域面積最小值。

2. 在空間中，將點$p(x_0,y_0,z_0)$投影至平面$x+y+z=0$的正投影矩陣為 M，試求矩陣 M。

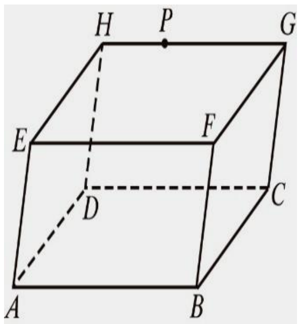
3. ABCD 為圓內接四邊形,$\overline{AB}=1,\overline{BC}=7,\overline{CD}=5,\overline{DA}=5$,$\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}$,求數對$(\alpha,\beta)$。

4. 設資料$X=(-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4)$，而$i=1$、2、3、4 時，資料$Y_i=((-4)^i,(-3)^i,(-2)^i,(-1)^i,0^i,1^i,2^i,3^i,4^i)$。令$r_i$代表資料$X$和資料$Y_i$的相關係數，$i=1$、2、3、4。請寫出$r_1$、$r_2$、$r_3$與$r_4$的大小關係（例如$r_1<r_2=r_3<r_4$或$r_4<r_3<r_2<r_1$）。

5. 已知$|\log_3 x|=ax+b$之三個相異實根，由小而大依次成為公比$r=3$之等比數列，則其解為何？(三解，以k^m的形式表示)

6. ΔABC 中，$\angle A=\dfrac{\pi}{8},\angle C=\dfrac{\pi}{4},\overline{AB}=8$,求$\Delta$ABC 面積為何？

7. 右圖是由$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$所形成的平行六面體，若$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$兩兩的夾角都是60°，且$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{AE}=3$，點$P$在$\overline{HG}$上且$\overline{PG}=2\overline{PH}$，則$\overline{AP}$的長度為何？



8. 求$\cot\dfrac{\pi}{24}$的值為何？(化為最簡根式)

9. 假設位於第一象限的點P在$\Gamma: x^2=4y$的圖形上，點Q在正x軸上且滿足$\overline{OP}=\overline{OQ}$，直線$PQ$交$y$軸於$R$。當$P$沿曲線$\Gamma$趨近於原點時，點$R$的極限座標為何？

10. 設函數$f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$，滿足 $f\left(1-\dfrac{1}{1+t}\right)+f\left(\dfrac{1+t}{t}\right)\log|1+t|=f\left(\dfrac{1+t}{t}\right)\log|t|+2026$ ，

求 $f(1000)$ 的值為何？

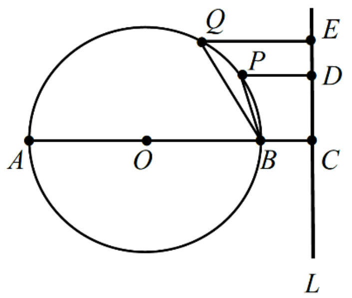
11. 坐標平面上， x與 y坐標均為整數的點為格子點。問在函數圖形 $y=\log_2 x$ 、 x軸與直線 x=20 所圍有界區域的內部（不含邊界）共有多少個格子點？

12. 已知丟某枚銅板，其正面的機率為 p ，反面的機率為 $(1-p)$ ，將此枚銅板丟擲n次，在丟擲過程中，正面第一次出現時，可得獎金 1 元，正面第二次出現時，可再得獎金 2 元，正面第三次出現時，可再得獎金 3 元，以此類推。共得到獎金 $\frac{1}{2}(n^2-n)$元的機率為何？

13. 如圖，$\overline{AB}$為圓O之直徑且直線L包含C 、 D 、 E三點。

已知直線L垂直$\overline{AB}$的延長線於C點。又P 、 Q為圓O上兩點，$\overline{PD}$ 、$\overline{QE}$各垂直直線L於D點、E點，

且 $\overline{BP}=\overline{PD}$ 、 $\overline{BQ}=\overline{QE}$ 。試證： $\overline{BP}+\overline{BQ}=\overline{AB}$ 。



14. 設 $A(1,0)$， $B(0,1)$為坐標平面上兩點，C為直線AB外一點．經平面線性變換M作用後，

A被映射至$A'(1,\sqrt{2})$， B被映射至$B'(-1,\sqrt{2})$，而C被映射至C' ．

① 試問變換M的矩陣為何?

② 試證明變換M將$\triangle ABC$的重心映射至$\triangle A'B'C'$的重心。

③ 若$\triangle ABC$的面積為3，試求點C'與直線$A'B'$的距離。