國立臺中第一高級中學97學年度第一次教師甄選數學科試題

所有題目皆為計算題，請作答於答案卷上，並寫出計算過程，無過程則該題不計分。答錯不倒扣。

第一部分(每題五分)

1. 求 $\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}\sin\frac{9\pi}{7}$ 之值。

2. 從 $\{1,2,4,5,6,7,8,9,0\}$ 選出四個數字(可重複)所排列成的四位正整數之中，有幾個為15的倍數。

3. 空間中 $O(0,0,0)$，$A(0,2,4)$，$B(4,4,8)$，P 為一動點。若 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，求 $\overline{OP}$ 的最大值。

4. 雙曲線與直線 $x+y=8$ 相切，且二焦點為 $(10,0)$ 與 $(0,4)$，求雙曲線的正焦弦長。

5. 若 $f(x)=2x-3$，$g(x)=\frac{1}{2}x^2-x$，$h(x)=x^2+2$，求 $\frac{d}{dx}f(g(h(x)))$。

6. ΔABC 中，$\overline{BC}=a,\overline{CA}=b,\overline{AB}=c$，若 $9a^2+9b^2-17c^2=0$，求 $\frac{\cot A+\cot B}{\cot C}$ 之值。

7. 數列 $\langle a_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ 滿足關係 $a_1=2008$ 與 $\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2a_n, n\geq 1$，求 a_{2008}。

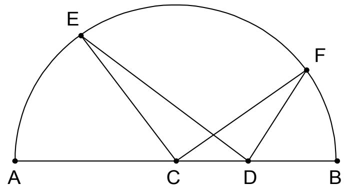
8. $f(x)$ 為四次多項式，且 $f(1996)=0, f(1998)=1, f(2000)=4, f(2002)=27, f(2004)=256$，求 $f(2008)$ 之值。

第二部分(每題六分)

9. 解方程式 $\sqrt[4]{16-x}+\sqrt[4]{1+x}=3$ 之實數解。

10. $\triangle ABC$ 中，已知 $(\overline{AC}+\overline{AB})\cdot(\overline{AC}-\overline{AB})=\overline{AB}\cdot\overline{BC}$ 且 $\angle BAC=75^o$，求 $\angle ABC$。

11. 如圖，若 $\overline{AB}$ 為直徑，C為圓心，E、F 為圓上兩相異點，D 在 $\overline{BC}$ 上且 $\angle CED=\angle CFD=10^o, \angle ACE=40^o$，求 $\angle BCF$。(圖形角度僅供參考，未準確)



12. 解 $\begin{cases}(3a^2+b^2)(a^2+3b^2)=\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}\\ 2(b^4-a^4)=\frac{1}{a}-\frac{1}{2b}\end{cases}$ 之實數解。

13. 以一個正24邊形的頂點任取三點所組成的三角形中，三內角均大於30度的三角形有幾個。

14. 袋中有2008顆球，分別編號為1,2,3,...,2008，設每球被取中的機率相同，今從袋中隨機取出三顆球，設三顆球之中編號最大者為T，求T的期望值。

15. 設 $X=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 滿足 $X^4+\frac{8}{3}X^3+X^2+\frac{8}{3}X+I=0$，令 $Y=X+X^{-1}$，且Y滿足 $Y^2+pY+qI=0$，求 $p,q,\cos\theta$ 之值

16. 求組合數 C_{1234}^{2008} 除以7的餘數。

17. 如右圖，有一個12格的長方形，現將1~12的正整數不重複全部填入12格之中，且滿足以下二個條件：(1)左右相鄰兩格的數字，右方大於左方。(2)上下相鄰兩格的數字，上方大於下方。試問符合題意的填入法有幾種。

18. 指數函數 $y=f(x)=a^x$ 與對數函數 $y=g(x)=\log_a x$，若已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 相交三點，求實數a的範圍。