

## 台北市立松山高級中學 99 學年度教師甄選數學科試題

[說明]：1~14 題每題 5 分，15~17 題每 10 分；請於答案卷上指定位置作答，並詳列計算過程才予計分。

1. 設  $k$  為實數，若多項式  $f(x)$  具有下列性質， $f(x+k)=f(x)+2k$ ， $f(1)=5$ ，則  $f(x)=$ ？

2. 求  $f(x)=x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^9+x$  除以  $x^3-x$  的餘式。

3. 設  $a, b, c$  為相異實數，若  $f(x)=\frac{a(x+a)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(x+b)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(x+c)^2}{(c-a)(c-b)}$ ，則

$$f\left(-\frac{a+b+c}{2}\right)=?$$

(高中數學 101 P81)

4. 化簡  $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=$ ？

5. 解方程式  $\begin{cases} x+xy+y=2+3\sqrt{2} \\ x^2+y^2=6 \end{cases}$ 。

6. 正  $\triangle ABC$  內部一點  $P$ ，已知  $\overline{PA}=6$ ， $\overline{PB}=8$ ， $\overline{PC}=10$ ，求  $\triangle ABC$  面積？

7. 設  $x, y$  為實數，若  $x+y=x^2+y^2$ ，求  $x^3+y^3+\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}y$  的最大值？

8. 設  $P(x, y)$  為滿足  $x^2+(y-1)^2 \leq 1$  的所有點，求  $\frac{x+y+1}{x-y+3}$  的最大值與最小值？

(高中數學 101 P220，<http://forum.nta.org.tw/oldphpbb2/viewtopic.php?t=33485>)

98 玉井工商，<http://math.pro/db/thread-811-1-3.html>

99 新竹女中，<http://www.shiner.idv.tw/teachers/viewtopic.php?f=53&t=1765>

9. 已知  $146=5^2+11^2$ ， $218=7^2+13^2$ ，試將  $146 \times 218=31828$  表示成兩個正整數的平方和？

<http://math.pro/db/thread-629-1-1.html>

10. 已知  $\sin \alpha - \sin \beta = \frac{1}{3}$ ， $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{4}$ ，求  $\tan(\alpha - \beta) =$ ？

11. 已知  $0 < b < 1$ ， $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ，則下列三數：

$$x = (\sin \alpha)^{\log_b \sin \alpha}, \quad y = (\cos \alpha)^{\log_b \cos \alpha}, \quad z = (\sin \alpha)^{\log_b \cos \alpha}$$

的大小關係為何？  
(奧數教程高一 第 10 講 三角函數的性質及應用)

12. 在一個圓周上有 20 個點，將它們兩兩之間連接成一弦，任意三條弦之間，除端點外不相交於同一點，請問此時所有的弦共有多少個交點？(不包含圓周上 20 個點)

13. 在 100 與 200 之間隨機選取一個實數  $x$ ，如果  $[\sqrt{x}] = 12$ ，則  $[10\sqrt{x}] = 120$  的機率為何？  
( $[x]$  表示不大於  $|x|$  的最大整數)

14. 函數  $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$  的最大值為何？

15. 已知  $a, b, c$  為實數，若  $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$  有三正根，求證：(1)  $a^2 - 3b \geq 0$  (2)  $b^3 \geq 27c^2$   
(高中數學 101 P88)

16.  $P$  為  $\triangle ABC$  內部一點，且  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \theta$ 。

求證： $\csc^2 \theta = \csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C$ 。

(高中數學 101 P127)

17. 經過原點的直線  $L$  與函數  $f(x) = x^2(3-x)$  的圖形在第一象限交於兩相異點  $P$ 、 $Q$ 。試求：

(1) 直線  $L$  的斜率範圍。

(2) 設  $A(3,0)$ ，則  $\triangle APQ$  之最大面積為何？